

## 4 Résumé de la thèse (2 pages maxi)

Depuis de nombreuses années les jeux sont un sujet très vaste et sont étudiés dans plusieurs disciplines avec des optiques différentes sans être toutefois totalement étrangères entre elles. En économie, les jeux considérés font intervenir généralement plusieurs acteurs qui n'ont pas forcément une information complète du système (ce qui traduit par exemple la complexité d'un modèle socio-économique). L'une des questions centrales est alors la recherche d'une position d'équilibre du système, c'est-à-dire un état de ce dernier dans lequel aucun des acteurs n'a intérêt à changer son comportement sous peine de voir son gain diminuer. En logique mathématique, les jeux étudiés sont principalement des jeux à deux joueurs à information complète munis de conditions de gain complexes (généralement décrites par un ensemble dont on souhaite déterminer la complexité topologique). L'issue d'une partie est la victoire ou la défaite et il n'y a plus de notion de gain ou de perte comme dans les jeux issus de l'économie. La question centrale est alors de savoir si le jeu est déterminé, c'est-à-dire d'établir s'il existe un joueur qui possède une stratégie gagnante. En informatique, les jeux prennent une place de plus en plus importante et connaissent des formes variées qui appellent des applications très diverses. Outre les jeux à deux joueurs à information complète sur des graphes, signalons entre autres les jeux issus de la sémantique, les jeux s'intéressant à la modélisation des réseaux ou encore les jeux distribués (c'est-à-dire à plus de deux joueurs). Les jeux peuvent également se révéler être un outil de preuve puissant et élégant pour de nombreux problèmes théoriques. La question centrale consiste généralement à décider le gagnant et à calculer une stratégie gagnante. La grande diversité de ces jeux, les liens qui les unissent ou les relient aux jeux étudiés en économie ou en logique mathématique, le caractère très dynamique du domaine, ont été autant de raisons, pour l'équipe encadrante et moi-même, de travailler dans cette direction.

Mes travaux ont porté sur des jeux à deux joueurs à information complète sur des graphes infinis, et plus précisément sur des graphes de transition d'automates à pile. Le graphe peut alors être vu comme modélisant un système ouvert, c'est-à-dire une interaction entre un programme et un environnement pouvant être hostile. Dans ce cadre, le premier joueur, Eve, est associé à un programme, tandis que le second joueur, Adam, représente un environnement. Les sommets du graphe sont partitionnés en deux sous-ensembles, l'un contrôlé par Eve, l'autre par Adam. Un sommet d'Eve représente un état du système dans lequel le programme va faire une action tandis qu'un sommet d'Adam représente un état du système où c'est à l'environnement d'agir. Une partie, qui peut être vue comme le déplacement d'un jeton dans le graphe (le joueur à qui appartient le sommet contenant le jeton choisit dans quel sommet voisin aller) représente alors une exécution du système. La condition de gain code une propriété que l'on souhaite vérifier. L'existence d'une stratégie gagnante pour Eve se traduit par l'existence d'un contrôleur pour le programme.

J'ai considéré non seulement des conditions de gain classiques (accessibilité, Büchi, parité, Muller...) mais aussi des conditions plus spécifiques au modèle,

comme celles portant sur le bornage de la pile. Ces conditions peuvent être combinées entre elles afin de synthétiser par exemple un contrôleur pour un programme récursif de sorte à ce que, quoi que fasse l'environnement, la pile de ce dernier soit bornée et qu'en même temps une condition de vivacité soit réalisée.

Les deux premiers chapitres de ma thèse donnent les principales définitions relatives aux langages formels (chapitre 1) et aux jeux (chapitre 2). Le troisième chapitre propose un état de l'art et présente les résultats obtenus.

Une première contribution (chapitre 4) a été de fournir une représentation *finie* des ensembles de positions gagnantes pour les jeux de parité puis de généraliser cette technique et d'obtenir une condition suffisante sur les conditions de gain pour avoir une représentation finie des ensembles de positions gagnantes. La portée de ces résultats est double : ils offrent une solution uniforme au problème de décision du gagnant dans de nombreux jeux (et en particulier pour les jeux de parité pour lesquels le résultat n'était pas connu) et ils permettent une présentation plus claires des techniques utilisées par la suite.

Dans le chapitre 5, différentes techniques sont introduites et donnent une présentation plus simple et intuitive des résultats de I. Walukiewicz sur la décidabilité des jeux de parité. Un exemple complet est en outre proposé en filigramme. Ces techniques sont ensuite adaptées pour diverses conditions de gains : la condition de bornage de la pile (généralisant tout en offrant une nouvelle preuve un résultat de T. Cachat, J. Duparc et W. Thomas) et la condition de parité en escalier qui se révélera très utile par la suite (chapitre 8).

Une autre contribution (chapitre 6) a été la description d'une famille de conditions de gain de complexité topologique arbitraire finie pour lesquelles les jeux (sur des graphes finis ou sur des graphes de processus à pile) restent décidables. Ces résultats résolvent une question posée par W. Thomas il y a une dizaine d'années, et ouvrent de nouvelles perspectives pour l'étude de conditions de gain expressives et décidables.

L'étude des jeux sur les graphes de processus à pile sans état et sur les graphes de processus à compteur (chapitre 7) a permis de proposer des techniques propres à ces modèles, qui fournissent alors des bornes de complexité meilleures que celles obtenues dans le cas général des graphes de processus à pile. Les résultats obtenus pour les processus à compteur impliquent une amélioration importante (Pspace au lieu de Exptime) de la meilleure borne connue pour le problème du model-checking de formule de la logique du  $\mu$ -calcul pour un processus à compteur, et se révèlent en outre être un outil algorithmique efficace et simple pour d'autres jeux.

Enfin, une dernière contribution a été de proposer une solution pour les jeux sur des graphes de processus à pile munis de conditions combinant des conditions régulières et des conditions sur la hauteur de pile et pour des conditions décrites par des automates à pile avec visibilité (chapitre 8). Ces résultats sont particulièrement intéressants pour la vérification automatique des programmes récursifs, puisqu'ils montrent comment vérifier de façon optimale des propriétés naturelles et expressives.