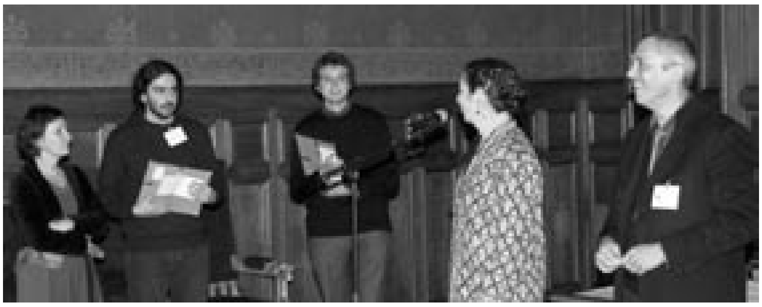
Prix de thèse 2008

Le prix de thèse Gilles Kahn 2008, décerné par Specif et patronné par l'Académie des Sciences a été attribué à Laurent Bienvenu. Les deux deuxièmes prix ont été décernés (par ordre alphabétique) à: Konstantinos Chatzikokolalis et Sylvain Gelly. Vous trouverez ici les résumés des travaux des lauréats et la liste des nombreux candidats. Les thèses sont sur le site de Specif.



Game-theoretic characterizations of randomness: unpredictability and stochasticity

Laurent BIENVENU a reçu le prix de thèse 2008. Il a fait cette thèse à l'Université de Provence (LIF) sous la direction de Bruno Durand et d'Alexander Shen.

Imaginons que l'on tire dix mille fois à pile ou face avec une pièce équilibrée, et que l'on obtienne la suite 1010101010... (10 répété cinq mille fois, avec 0 pour pile et 1 pour face). Ce résultat semble étonnant: la suite obtenue est en effet trop régulière; on s'attendait plutôt à obtenir une suite plus «aléatoire» telle que 1110100100110100100... Le problème est que la théorie classique des probabilités ne permet pas de formaliser cette intuition: toutes les suites de dix mille bits ont la même probabilité d'occurrence.

Pour donner un sens à notre intuition, c'est-à-dire pour distinguer les suites «aléatoires» des suites «non-aléatoires», on adopte un point de vue plus proche de l'informatique, en construisant une **théorie algorithmique de l'aléatoire**. On distingue trois approches principales de cette théorie. (1) L'approche par les tests: une suite est aléatoire si elle satisfait toutes les propriétés ayant une forte probabilité et vérifiables par algorithme (par exemple: avoir à peu près autant de zéros que de uns). (2) L'approche par la complexité: une suite est aléatoire si elle ne peut être décrite par un programme informatique plus court qu'elle. On définit alors la complexité de Kolmogorov d'une suite comme étant la taille du plus petit programme (écrit en binaire, et pour un langage fixé à l'avance) qui la génère. Une suite aléatoire est donc une suite dont la complexité de Kolmogorov est proche de sa longueur. Avec cette approche, dire qu'une suite est aléatoire revient à dire qu'elle est parfaitement incompressible. (3) L'approche par les jeux: une suite est aléatoire s'il n'existe pas de stratégie calculable par algorithme permettant à un joueur d'en deviner les bits de manière satisfaisante. Le modèle de jeux le plus utilisé est le suivant: les bits de la suite étant intialemenent cachés, un joueur essaie de les deviner séquentiellement en pariant à chaque tour une somme d'argent sur la valeur d'un bit caché (le montant d'argent misé ne pouvant excéder le capital du joueur). Le bit est alors révélé, et le joueur double sa mise si sa prédiction était correcte, et perd sa mise sinon. Le joueur gagne si son capital grandit significativement au cours de la partie. Il est à noter que ces trois approches sont appropriées pour l'étude des suites binaires finies, mais également pour les suites binaires infinies, pour lesquelles elles permettent même une distinction qualitative entre «aléatoire» et «non-aléatoire» (ce n'est pas le cas pour les suites finies pour lesquelles la distinction est essentiellement quantitative).

Une des grandes lignes de recherche en théorie algorithmique de l'aléatoire est de comparer ces trois approches. C'est le but poursuivi dans cette thèse, en prenant l'approche par les jeux comme point de vue central. Dans un premier temps, on classifie les suites non-aléatoires en fonction de la vitesse de gain des stratégies qui les devinent. On montre que la classe des suites pour lesquelles il existe une stratégie gagnant exponentiellement vite joue un rôle important, et peut s'interpréter soit grâce à la loi des grands nombres, soit grâce à la notion de dimension fractale (dimension de Hausdorff). On donne de plus des théorèmes d'équivalence entre vitesse de gain des stratégies et complexité de Kolmogorov.

Dans un second temps, on étudie de manière plus générale les liens entre complexité de Kolmogorov et existence de stratégies gagnantes, à la lumière de l'approche par les tests. Cette dernière étant de nature plus analytique, elle permet d'appliquer les outils classiques de la théorie de la mesure à notre étude. Par exemple, on a montré qu'une condition forte d'aléatoire sur les suites infinies (où l'on demande qu'une infinité de préfixes finis de la suite soient de complexité de Kolmogorov maximale) pouvait être interprétée naturellement comme une version constructive du lemme de Fatou.

Les résultats très précis obtenus sur les liens entre aléatoire et imprédictibilité par les jeux obtenus dans cette thèse conduisent à des résultats importants et surprenants sur la complexité de Kolmogorov. Il est connu depuis longtemps que la complexité de Kolmogorov est une fonction non calculable par algorithme. Une propriété un peu décevante pour une notion sur laquelle on base la théorie **algorithmique** de l'aléatoire ! Dans cette thèse on montre que, dans la quasi-totalité des théorèmes où elle est utilisée, la complexité de Kolmogorov peut être remplacée des approximations calculables. Calculer une approximation de la complexité de Kolmogorov revenant essentiellement à effectuer une compression de données, les résultats de cette thèse fournissent un cadre unifié entre aléatoire, jeux, et compression de données.

Enfin, dans la dernière partie de la thèse, on s' intéresse au problème plus général des suites aléatoires pour les mesures de probabilité quelconques. Il est clair que changer la mesure de probabilité sous-jacente change en général la classe des suites aléatoires. Par exemple, si la mesure de probabilité est la mesure pour lesquels les bits sont tirés indépendamment, mais avec une probabilité 90% d'obtenir 0 (une telle mesure porte le nom de mesure de Bernoulli de paramètre 0.9), la suite 0000100000000... semble bien plus aléatoire que 001101001001111.... Partant de ce constat, on se demande alors à quel point la notion de suite aléatoire dépend de la mesure de probabilité. De façon équivalente, ceci revient à se demander quelles petites modifications peuvent être apportées à la mesure de probabilité sans changer la notion de suite aléatoire. Cette thèse étudie d'abord cette question pour la classe des mesures de Bernoulli généralisées (pour lesquelles chaque bit est tiré indépendamment, mais avec une distribution de probabilité dépendant de sa position). En théorie classique des probabilités, le critère permettant d'étudier l'équivalence de deux mesures de Bernoulli généralisées est le théorème de Kakutani. On donne une nouvelle preuve de ce théorème par les jeux. La nature constructive de cette preuve permet de l'appliquer le théorème de Kakutani à la théorie algorithmique de l'aléatoire. Enfin, on obtient, en toute généralité, une classification complète de la robustesse aux changements de mesure des différentes notions d'aléatoire, pour des mesures de probabilité quelconques.